Βιογραφικό Σημείωμα

του

Νικόλαου Σωφρονίδη*

Εκπαίδευση

1. Διδακτορικό δίπλωμα στην οικονομική επιστήμη από το Πανεπιστήμιο Μακεδονίας (26 Φεβρουαρίου 2004)

2. Διδακτορικό δίπλωμα στη μαθηματική επιστήμη από το *California Institute of Technology* (11 Ιουνίου 1999)

   (**http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id = 38161**)

3. Πτυχίο στη μαθηματική επιστήμη από το Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (13 Ιουλίου 1995)

Εργασιακή Εμπειρία

Ως ειδικός συνεργάτης με το νόμο 407 στο Τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης δίδαξα αυτοδύναμα κατά τα ακαδημαϊκά έτη 2001-2004 και ως ειδικός συνεργάτης με το νόμο 407 στο Τμήμα Μαθηματικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης δίδαξα αυτοδύναμα κατά τα ακαδημαϊκά έτη 2005-2007. Είμαι Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων από το φθινοπωρινό εξάμηνο του 2007 και Μόνιμος Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων από το εαρινό εξάμηνο του 2011. Είμαι Μόνιμος Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων από τις 3 Ιουλίου 2013.

*ΑΣΜΑ: 130/2543/94

Ερευνητικές Δημοσιεύσεις

Διδακτορικές Διατριβές

1. *N. E. Sofronidis*, *Topics in descriptive set theory related to equivalence relations, complex Borel and analytic Sets*, *Ph.D. Thesis*, *California Institute of Technology*, 1999, δημοσιεύθηκε από την **UMI Dissertation Services**.

   Πέραν των άρθρων σε ερευνητικά περιοδικά με κριτές 1 και 3, στην $ZF -$ *Axiom of Foundation* $+$ *Axiom of Countable Choice*, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, κατασκευάζω συνεχή συνάρτηση

   $$2^{(\mathbf{N}\setminus\{0\})\times(\mathbf{N}\setminus\{0\})} \ni x \mapsto (a_n^x)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}\setminus\{0\}}$$

   με την ιδιότητα ότι $x \in P_3$ ακριβώς τότε, όταν η τετμημένη απόλυτης σύγκλισης της σειράς *Dirichlet* $\mathbf{R} \ni s \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \in \mathbf{C}$ είναι ίση προς $-\infty$, όπου

   $$P_3 = \left\{x \in 2^{(\mathbf{N}\setminus\{0\})\times(\mathbf{N}\setminus\{0\})} : \forall m \forall^\infty n (x(m,n) = 0)\right\},$$

   και συνεπώς η τετμημένη απόλυτης σύγκλισης σειράς *Dirichlet* δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο $-\infty$.

2. Ν. Ε. Σωφρονίδης, Θέματα στα οικονομικά από τη θεωρία παιγνίων, τη θεωρία γενικών ισορροπιών και τα μακροοικονομικά, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, 2004, διατίθεται από το **Εθνικό Κέντρο Τεκμηρίωσης**.

   Πέραν των άρθρων σε ερευνητικά περιοδικά με κριτές 2 και 5, στην $ZF -$ *Axiom of Foundation* $+$ *Axiom of Countable Choice*, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω ότι το σύνολο των τυχουσών οικονομιών ιδιωτικής ιδιοκτησίας με 2 καταναλωτές, των οποίων οι προτιμήσεις είναι συνεχείς, 2 παραγωγούς και 2 αγαθά, τέτοιων ώστε στις εν λόγω οικονομίες να εξισούται η ζήτηση με την προσφορά, είναι F_σ.

Άρθρα σε ερευνητικά περιοδικά με κριτές

1. *N. E. Sofronidis*, *Natural examples of* $\mathbf{\Pi}_5^0$*-complete sets in analysis*, **Proceedings of the American Mathematical Society**, *Volume* 130, *Number* 4, 2001, *pp.* 1177-1182.

   Στην $ZF -$ *Axiom of Foundation* $+$ *Axiom of Countable Choice*, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, για κάθε $\alpha \geq 0$, κατασκευάζω συνεχή συνάρτηση $2^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}} \ni x \mapsto$

$f_x \in H(\mathbf{C})$ με την ιδιότητα ότι $x \in P_3$ ακριβώς τότε, όταν η τάξη της f_x είναι ίση προς α, όπου

$$P_3 = \left\{x \in 2^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}} : \forall m \forall^\infty n (x(m,n) = 0)\right\},$$

και συνεπώς η τάξη ακεραίας συναρτήσεως είναι $Baire$ 2 και όχι συνεχής συνάρτηση σε κάθε $\alpha \geq 0$. Έπεται, λοιπόν, ότι η τάξη μεταβαλλόμενου ακεραίου επίπεδου πεδίου ταχυτήτων συνεχούς μέσου είναι $Baire$ 2 και όχι συνεχής συνάρτηση σε κάθε $\alpha \geq 0$. Επίσης, στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, για κάθε $\alpha \geq 0$, κατασκευάζω συνεχή συνάρτηση $2^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}} \ni x \mapsto (f_k^x)_{k\in\mathbf{N}} \in H(\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$ με την ιδιότητα ότι $x \in P_5^*$ ακριβώς τότε, όταν οι τάξεις των ακεραίων συναρτήσεων f_0^x, f_1^x, f_2^x, ... συγκλίνουν προς το α, όπου

$$P_5^* = \left\{x \in 2^{\mathbf{N}\times\mathbf{N}} : \forall l \forall^\infty m \forall^\infty n (x(l,[m,n]) = 0)\right\}$$

και $[m,n] = \frac{(m+n)^2+3m+n}{2}$, όταν $(m,n) \in \mathbf{N}^2$.

2. *N. E. Sofronidis*, *Mathematical economics and descriptive set theory*, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, *Volume* 264 (2001), *pp.* 182-205.

   Πρώτον, αποδεικνύω ότι στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, το σύνολο των τυχουσών οικονομιών ανταλλαγής με 2 καταναλωτές, των οποίων οι προτιμήσεις είναι συνεχείς, και 2 αγαθά, τέτοιων ώστε στις εν λόγω οικονομίες να εξισούται η ζήτηση με την προσφορά, είναι F_σ. Δεύτερον, αποδεικνύω ότι στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, το σύνολο των τυχόντων απείρου ορίζοντα διακριτών ντετερμινιστικών μακροοικονομικών μοντέλων με συνεχή συνάρτηση επιστροφών μιας περιόδου και μη εκφυλισμένο κλειστό διάστημα στο $\mathbf{R}$ ως σύνολο των καταστατικών μεταβλητών, τέτοιων ώστε στα εν λόγω μοντέλα να υπάρχει βέλτιστο πλάνο που αρχίζει από κάποιο σημείο, είναι F_σ.

3. *N. E. Sofronidis*, *Analytic non-Borel sets and vertices of differentiable curves in the plane*, **Real Analysis Exchange**, *Volume* 27, *Number* 1, 2001/2002, *pp.* 735-748.

   Αποδεικνύω ότι στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, για κάθε πληθάριθμο $1 \leq n < \aleph_0$, το σύνολο των τυχουσών διαφορίσιμων καμπυλών της κλάσεως C^3 στο επίπεδο, τέτοιων ώστε οι εν λόγω καμπύλες να έχουν n κορυφές, είναι F_σ. Έπεται, λοιπόν, ότι για κάθε αρκούντος μικρό θετικό ακέραιο n, το σύνολο των προβολών επί του οδοστρώματος τυχουσών διαφορίσιμων της κλάσεως C^3 τροχιών κέντρων βάρους κινούμενων οχημάτων, τέτοιον ώστε οι εν λόγω προβολές των τροχιών να έχουν n κορυφές, είναι F_σ. Έπεται, λοιπόν, ότι για κάθε αρκούντος μικρό θετικό ακέραιο n, το σύνολο των προβολών επί του εδάφους τυχουσών διαφορίσιμων της κλάσεως C^3 τροχιών κέντρων βάρους περιπατητών ή δρομέων, τέτοιων ώστε οι εν λόγω προβολές των τροχιών να έχουν n κορυφές, είναι F_σ.

4. $N.\ E.\ Sofronidis$, $Turbulence\ phenomena\ in\ elementary\ real\ analysis$, **Real Analysis Exchange**, $Volume$ 29, $Number$ 2, 2003/ 2004, $pp.$ 813-820.

   Αποδεικνύω ότι στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, κάθε κλάση ισοδυναμίας της ασυμπτωτικής ισότητας σε σημείο, των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, είναι σύνολο της πρώτης κατηγορίας του $Baire$ που είναι πυκνό. Έπεται, λοιπόν, ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας της ασυμπτωτικής ισότητας σε χρονική στιγμή των προβολών επί του οδοστρώματος των δυνατών τροχιών του κέντρου βάρους κινούμενου οχήματος ως προς το χρόνο είναι σύνολο της πρώτης κατηγορίας του $Baire$ που είναι πυκνό. Έπεται, λοιπόν, ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας της ασυμπτωτικής ισότητας σε χρονική στιγμή των προβολών επί του εδάφους των δυνατών τροχιών του κέντρου βάρους περιπατητή ή δρομέα ως προς το χρόνο είναι σύνολο της πρώτης κατηγορίας του $Baire$ που είναι πυκνό.

5. $N.\ E.\ Sofronidis$, $Undecidability\ of\ the\ existence\ of\ pure\ Nash\ equilibria$, **Economic Theory**, $Volume$ 23 (2004), $pp.$ 423-428.

   Αποδεικνύω ότι στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, δεν υπάρχει μηχανή $Turing$ που αποφασίζει για κάθε στρατηγικό παίγνιο με n μηχανές $Turing$, ως παίκτες, κατά πόσον έχει ή όχι καθαρή ισορροπία $Nash$.

6. $N.\ E.\ Sofronidis$, $Downsian\ competition\ with\ four\ parties$, $\mathbf{Ma-}$ **thematical Social Sciences**, $Volume$ 50 (2005), $pp.$ 331-335.

   Αποδεικνύω ότι στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αν το $[0, 1]$ μοντελοποιεί το μονοδιάστατο εκλογικό φάσμα, ως ποσοστό του ιδιωτικού τομέα στην οικονομία, στο οποίο είναι κατανεμημένο το εκλογικό σώμα με συνεχή και θετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότας δ επί του $(0, 1)$, τότε στο στρατηγικό παίγνιο $\mathcal{G}(\delta, 4)$ του εκλογικού ανταγωνισμού κατά $Downs$ με τέσσερα πολιτικά κόμματα, αν ξ_i είναι το μοναδικό σημείο του $[0, 1]$, για το οποίο $\int_0^{\xi_i} \delta(x)dx = \frac{i}{4}$, όταν $i \in \{1, 2, 3\}$, τότε το $\mathcal{G}(\delta, 4)$ έχει καθαρή ισορροπία $Nash$, αν και μόνον αν $\int_{\frac{\xi_1+t}{2}}^{\frac{t+\xi_3}{2}} \delta(x)dx \leq \frac{1}{4}$ για κάθε $t \in (\xi_1, \xi_3)$, οπότε στην καθαρή ισορροπία $Nash$

του $\mathcal{G}(\delta,4)$ ακριβώς δύο από τα τέσσερα πολιτικά κόμματα υποστηρίζουν ότι ξ_1 πρέπει να είναι το ποσοστό του ιδιωτικού τομέα στην οικονομία και ακριβώς δύο από τα τέσσερα πολιτικά κόμματα υποστηρίζουν ότι ξ_3 πρέπει να είναι το ποσοστό του ιδιωτικού τομέα στην οικονομία.

7. *N. E. Sofronidis*, *Turbulence phenomena in real analysis*, **Archive for Mathematical Logic**, *Volume* 44 (2005), *pp.* 801-815.

   Αποδεικνύω ότι στην *ZF − Axiom of Foundation + Axiom of Countable Choice*, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, κάθε κλάση ισοδυναμίας της ασυμπτωτικής ισότητας στο ∞, των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί των τοπικά συμπαγών, μη συμπαγών, τέλειων Πολωνικών υποχώρων του $\mathbf{R}^2$, είναι σύνολο της πρώτης κατηγορίας του *Baire* που είναι πυκνό. Έπεται, λοιπόν, ότι, δεδομένου ότι η ταχύτητα διαφυγής έχει ορισμένη τιμή και συνεπώς υπάρχει μέγιστο και επομένως ελάχιστο ύψος θαλάσσιου κύματος και δεδομένου ότι κάθε ανοικτό διάστημα της πραγματικής ευθείας είναι διαφορομορφικό προς την πραγματική ευθεία, αν $0 < \alpha < 1$ και Ω_α είναι το κυρτό περίβλημα του $\overline{D}(0;\alpha) \cup \{1\}$, όπου $D(0;\alpha) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < \alpha\}$ και $0 \leq \theta < 2\pi$, τότε κάθε κλάση ισοδυναμίας της ασυμπτωτικής ισότητας στο $e^{i\theta}$ των δυνατών θαλάσσιων κυμάτων που δημιουργούνται από κινούμενο πλοίο, του οποίου το κέντρο βάρους προβάλλεται εντός του $e^{i\theta}\Omega_\alpha \setminus \{e^{i\theta}\}$, είναι σύνολο της πρώτης κατηγορίας του *Baire* που είναι πυκνό. Αποδεικνύω, επίσης, ότι στην *ZF − Axiom of Foundation + Axiom of Countable Choice*, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, για κάθε $r \in (\mathbf{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, κάθε κλάση ισοδυναμίας της ασυμπτωτικής ισότητας στο ∞, των διαφορίσιμων πραγματικών συναρτήσεων της κλάσεως C^r 2 πραγματικών μεταβλητών, είναι σύνολο της πρώτης κατηγορίας του *Baire* που είναι πυκνό.

8. *N. E. Sofronidis*, *The equivalence relation of being of the same kind*, **Real Analysis Exchange**, *Volume* 33, *Number* 2, 2007/2008, *pp.* 279-284.

   Αποδεικνύω ότι στην *ZF − Axiom of Foundation + Axiom of Countable Choice*, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, υπάρχει τυρδώδης δράση Πολωνικής ομάδος που εμβαπτίζεται εντός της ιδίου είδους σύγκλισης αριθμητικών σειρών θετικών όρων. Έπεται, λοιπόν, ότι υπάρχει τυρβώδης δράση Πολωνικής ομάδος, της οποίας η σχέση τροχιακής ισοδυναμίας είναι υποσύνολο της σχέσης ισοδυναμίας ιδίου είδους μεταβαλλόμενων τετραγωνικών κυμάτων ανά μονάδα χρόνου.

9. *N. E. Sofronidis*, *Topological upper limits of mixed Nash equilibria*, **Economic Theory**, *Volume* 34 (2008), *pp.* 395-399.

   Αποδεικνύω ότι στην *ZF − Axiom of Foundation + Axiom of Countable Choice*, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, δοθέντων οποιωνδήποτε διμελών συνόλων S_1, S_2, αν για κάθε $\mathbf{u} \in \left(\mathbf{R}^{S_1 \times S_2}\right)^2$, $MNE(\mathbf{u})$ είναι το μη κενό και συμπαγές σύνολο των μικτών ισορροπιών $Nash$ του $(S_1, S_2, \mathbf{u})$, ενώ $\mathbf{u}^k \to \mathbf{u}$ εντός του $\left(\mathbf{R}^{S_1 \times S_2}\right)^2$ καθώς $k \to \infty$, τότε

$$\limsup_{k \to \infty} MNE\left(\mathbf{u}^k\right) \subseteq MNE(\mathbf{u}).$$

Άρθρα σε πρακτικά συνεδρίων με κριτές

1. *N. E. Sofronidis*, *The law of large numbers is a* $\mathbf{\Pi}_3^0$*-complete property*, **Proceedings of the 5^{th} Panhellenic Logic Symposium**, 2005, *pp.* 162-167.

   Στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, για κάθε μέτρο πιθανότητας $\mathcal{P}$ επί του $\mathbf{N}$ τέτοιο, ώστε κάθε στοιχειώδες γεγονός έχει θετική πιθανότητα, κατασκευάζω συνεχή συνάρτηση $2^{\mathbf{N} \times \mathbf{N}} \ni x \mapsto (\xi_n^x)_{n \in \mathbf{N}} \in L^1(\mathbf{N}, \mathcal{P})^{\mathbf{N}}$ με την ιδιότητα ότι $x \in P_3$ ακριβώς τότε, όταν η ακολουθία L^1 τυχαίων μεταβλητών $(\xi_n^x)_{n \in \mathbf{N}}$ πληρεί το νόμο των μεγάλων αριθμών, όπου

   $$P_3 = \left\{x \in 2^{\mathbf{N} \times \mathbf{N}} : \forall m \forall^\infty n (x(m,n) = 0)\right\},$$

   και συνεπώς ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν είναι κλειστή ιδιότητα. Έπεται, λοιπόν, ότι επειδή υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος, ώστε κάθε μέτρηση σε κάθε ιατρική επιστήμη έχει το πολύ N δυαδικά ψηφία, για κάθε ιατρική επιστήμη, οι μετρήσεις είναι σε ρητούς αριθμούς, οπότε για κάθε ιατρική επιστήμη, κάθε χώρος μέτρου πιθανότητας μετρήσεων είναι όπως ακριβώς οι ανωτέρω, άρα για όλες τις μετρήσεις σε όλες τις ιατρικές επιστήμες, ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν είναι κλειστή ιδιότητα και συνεπώς, καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται, μια εφαρμοζόμενη αγωγή πιθανόν να μην συγκλίνει σε μία πραγματική θεραπεία.

Άρθρα στο arXiv.org

1. *N. E. Sofronidis*, *Variational inequalities*, **arXiv**, 17 *February* 2015.

   Στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω τα εξής: Αν $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ και η $f \in C^3\left([\alpha, \beta] \times \mathbf{R}^2, \mathbf{R}\right)$ είναι φραγμένη, ενώ η $y \in C^2\left([\alpha, \beta], \mathbf{R}\right)$ λύνει το τυπικό μονοδιάστατο πρόβλημα του λογισμού μεταβολών να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση

   $$F(y) = \int_\alpha^\beta f\left(x, y(x), y'(x)\right) dx,$$

   τότε για κάθε $\phi \in C^2\left([\alpha, \beta], \mathbf{R}\right)$ για το οποίο $\phi^{(k)}(\alpha) = \phi^{(k)}(\beta) = 0$ για κάθε $k \in \{0, 1, 2\}$, ισχύει ότι

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\phi^2 - \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial y'} 2\phi^3 \right) dx \geq \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} 2\phi\phi' \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y'^2} 2\phi^2\phi' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\phi\phi'' + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y'^2}\phi'\phi^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}\phi\phi'^2 \right) dx.$$

Έπεται, λοιπόν, ότι είτε αυτές είναι ανισότητες μεταβολών της κίνησης ή η συνάρτηση *Lagrange* της κίνησης δεν είναι C^3.

2. *N. E. Sofronidis*, *On continuous Polish group actions and equivalence relations*, **arXiv**, 14 *March* 2015.

   Στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο

   $$\mathbf{P} = \left\{\mathbf{x} \in \ell^1(\mathbf{R}) : (\forall n \in \mathbf{N})(\mathbf{x}(n) > 0)\right\}$$

   και την αντιμεταθετική Πολωνική ομάδα

   $$\mathbf{G} = \left\{\mathbf{g} \in (0,\infty)^{\mathbf{N}} : \lim_{n\to\infty} \mathbf{g}(n) = 1\right\},$$

   ενώ θέτουμε $(\mathbf{g}\cdot\mathbf{x})(n) = \mathbf{g}(n)\mathbf{x}(n)$, όταν $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$ και $n \in \mathbf{N}$. Ώστε, στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω τα εξής: Αν θεωρήσουμε τον Πολωνικό χώρο $\ell^1(\mathbf{C}^*) = \left\{\mathbf{x} \in \ell^1(\mathbf{C}) : (\forall n \in \mathbf{N})(\mathbf{x}(n) \neq 0)\right\}$ και θέσουμε

   $$\mathbf{H} = \left\{\mathbf{h} \in (\mathbf{C}^*)^{\mathbf{N}} : \lim_{n\to\infty} \mathbf{h}(n) = 1\right\},$$

   ενώ $(\mathbf{h}\cdot\mathbf{x})(n) = \mathbf{h}(n)\mathbf{x}(n)$, όταν $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$, $\mathbf{x} \in \ell^1(\mathbf{C}^*)$ και $n \in \mathbf{N}$, τότε η $\mathbf{H}$ είναι αντιμεταθετική Πολωνική ομάδα ως προς τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό και η $\mathbf{H} \times \ell^1(\mathbf{C}^*) \ni (\mathbf{h},\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{h}\cdot\mathbf{x} \in \ell^1(\mathbf{C}^*)$ είναι συνεχής δράση Πολωνικής ομάδας, κάθε τροχιά της οποίας είναι σύνολο της πρώτης κατηγορίας του *Baire* που είναι πυκνό, ενώ η $\mathbf{G}$ επί του $\mathbf{P}$ είναι υποδράση της $\mathbf{H}$ επί του $\ell^1(\mathbf{C}^*)$. Επιπλέον, αν

   $$\mathbf{F} = \left\{f \in C((0,\infty),(0,\infty)) : \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 1\right\},$$

   τότε η $\mathbf{F}$ αποτελεί αντιμεταθετική Πολωνική ομάδα ως προς τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό και η $\mathbf{G}^* = \left\{\mathbf{g} \in (0,\infty)^{\mathbf{N}^*} : \lim_{n\to\infty} \mathbf{g}(n) = 1\right\}$ που είναι ουσιαστικά η $\mathbf{G}$ είναι Πολωνικός υποχώρος και όχι Πολωνική υποομάδα της $\mathbf{F}$.

3. *N. E. Sofronidis*, *Fixed point free homeomorphisms of the complex plane*, **arXiv**, 9 *August* 2016.

Στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω ότι η ομάδα $H(\mathbf{C})$ των ομοιομορφισμών του μιγαδικού επιπέδου $\mathbf{C}$ είναι μία μετρική ομάδα εφοδιασμένη με την μετρική που επάγεται από την ομοιόμορφη σύγκλιση των ομοιομορφσιμών και των αντιστρόφων τους επί συμπαγών και το σύνολο

$$\{h \in H(\mathbf{C}) : (\forall z \in \mathbf{C})(h(z) \neq z)\}$$

των άνευ σταθερού σημείου ομοιομορφισμών του μιγαδικού επιπέδου είναι ένα αναλλοίωτο ως προς τη συζυγία πυκνό G_δ υποσύνολο του $H(\mathbf{C})$. Επιπλέον, στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω ότι αν F είναι οποιοδήποτε κλειστό 2-*cell* εντός του $\mathbf{C}$, τότε το $\{h \in H(\mathbf{C}) : supp(h) \subseteq F\}$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό εντός του $H(\mathbf{C})$. Έπεται, λοιπόν, ότι για κάθε μιγαδικό επίπεδο $\mathbf{C}$ κάθετο προς τον οισοφάγο O του ανθρώπου, αν F είναι ορισμένο κλειστό 2-*cell* εντός του $\mathbf{C}$ που περικλείει, ανά πάσα στιγμή, την τομή των $\mathbf{C}$ και O, τότε σε κάθε κατάποση που κάνει ο άνθρωπος, το σύνολο των ομοιομορφισμών του $\mathbf{C}$ που αφήνουν το $\mathbf{C} \setminus F$ αναλλοίωτο είναι κλειστό και πουθενά πυκνό.

4. *N. E. Sofronidis*, *Diffeomorphisms of the closed unit disc converging to the identity*, **arXiv**, 10 *July* 2017.

   Στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω ότι αν $\mathcal{G}$ είναι η ομάδα (υπό τη σύνθεση απεικονίσεων) των διαφορομορφισμών $f : \overline{D}(0;1) \to \overline{D}(0;1)$ του κλειστού μοναδιαίου δίσκου $\overline{D}(0;1)$, οι οποίοι είναι η ταυτοτική απεικόνιση $id : \overline{D}(0;1) \to \overline{D}(0;1)$ επί του κλειστού μοναδιαίου κύκλου και ικανοποιούν τη συνθήκη $det(J(f)) > 0$, όπου $J(f)$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της f ή (ισοδύναμα) η παράγωγος *Fréchet* της f, τότε το $\mathcal{G}$ εφοδιασμένο με τη μετρική $d_{\mathcal{G}}(f,g) = \|f-g\|_\infty + \|J(f)-J(g)\|_\infty$, όπου τα f, g διατρέχουν το $\mathcal{G}$, είναι μετρικός χώρος εντός του οποίου $d_{\mathcal{G}}(f_t, id) \to 0$ καθώς $t \to 1^+$, όπου $f_t(z) = \frac{tz}{1+(t-1)|z|}$, όταν $z \in \overline{D}(0;1)$ και $t \geq 1$.

5. *N. E. Sofronidis*, *On geometry and mechanics*, **arXiv**, 25 *November* 2017.

   Στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω τα εξής: Ας είναι $\Omega \in K\left(\mathbf{R}^2\right)$ τέτοιο, ώστε $\Omega^\circ \neq \emptyset$ κι έστω ότι η $f : \Omega \to \mathbf{R}$ είναι C^1, ενώ $(x_0, y_0) \in \Omega^\circ$. Αν $(A,B) \in \mathbf{R}^2$ και

$$C(A,B) = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x-x_0) + B(y-y_0)\}$$

   ενώ $(A_n, B_n) \to \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ εντός του $\mathbf{R}^2$ καθώς $n \to \infty$, τότε

$$\limsup_{n\to\infty} C(A_n,B_n) \subseteq C\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

εντός του $K(\Omega)$. Επίσης, στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω τα εξής: Ας είναι $\Omega \in K\left(\mathbf{R}^3\right)$ τέτοιο, ώστε $\Omega^\circ \neq \emptyset$ κι έστω ότι η $f : \Omega \to \mathbf{R}$ είναι C^1, ενώ $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega^\circ$. Αν $(A, B, \Gamma) \in \mathbf{R}^3$ και

$$H(A,B,\Gamma) = \{(x,y,z) \in \Omega : \\ f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) = A(x-x_0) + B(y-y_0) + \Gamma(z-z_0)\}$$

ενώ $(A_n, B_n, \Gamma_n) \to \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$ εντός του $\mathbf{R}^3$ καθώς $n \to \infty$, τότε

$$\limsup_{n\to\infty} H(A_n, B_n, \Gamma_n) \\ \subseteq H\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$$

εντός του $K(\Omega)$. Επιπλέον, στην $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω ότι κάθε C^2 καμπύλη του χώρου δύναται να είναι λύση της αρχής της στάσιμης δράσης.

6. *N. E. Sofronidis*, *On homeomorphisms and C^1 maps*, **arXiv**, 27 *April* 2018.

   Μέσα στα πλαίσια της $ZF - Axiom\ of\ Foundation + Axiom\ of\ Countable\ Choice$, εις τρόπον ώστε κάθε στοιχείο των θεωρούμενων χώρων να υπάρχει στον εποπτικό χώρο, αποδεικνύω τα εξής: Πρώτον, αν α, β είναι οποιαδήποτε σημεία του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου $D(0;1)$ στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbf{C}$ και r, s είναι οποιοιδήποτε θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\overline{D}(\alpha;r) \subseteq D(0;1)$ και $\overline{D}(\beta;s) \subseteq D(0;1)$, τότε υπάρχουν $t \in (0,1)$ κι ένας ομοιομορφισμός $h : \overline{D}(0;1) \to \overline{D}(0;1)$ τέτοιοι, ώστε $\overline{D}(\alpha;r) \subseteq D(0;t)$, $\overline{D}(\beta;s) \subseteq D(0;t)$, $h\left[\overline{D}(\alpha;r)\right] = \overline{D}(\beta;s)$ και $h = id$ επί του $\overline{D}(0;1) \backslash D(0;t)$. Δεύτερον, αν $q \in \{2,3\}$ και $\mathbf{B}(\mathbf{0};1)$ είναι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα εντός του $\mathbf{R}^q$, ενώ για κάθε $t > 0$, θέσουμε $f^{(t)}(\mathbf{x}) = \frac{t\mathbf{x}}{1+(t-1)\|\mathbf{x}\|}$, όταν $\mathbf{x} \in \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{0};1)$, τότε $f^{(t)} \to id$ εντός του $C^1\left(\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{0};1), \mathbf{R}^q\right)$ καθώς $t \to 1^+$.

Διδακτικά Βιβλία

1. *N. E. Sofronidis*, *Lectures on industrial and applied mathematics*, **Simmetria Publications**, 2014.

Αναφορές

1. *N. Megiddo*, *Y. Xu*, *and B. Zhu*, *Editors*, *Algorithmic applications in management*, *Lecture Notes in Computer Science* **3521**, *Springer*, 2005.

2. *S. Béal*, *Rationalité limitée et jeux de machines*, *Revue Économique*, *Volume* 56 (2005), *pp.* 1033-1063.

3. *A. Marcone*, *Complexity of sets and binary relations in continuum theory : a survey*, *in* : *Set Theory. Centre de Recerca Matematica Barcelona*, 2003-2004, (*J. Bagaria and S. Todorcevic*, *eds.*), *Trends in Mathematics*, *Birkhauser*, 2006, *pp.* 121-147.

4. *K. Prasad*, *The rationality/computability trade-off in finite games*, *Journal of Economic Behavior* & *Organization*, *Volume* 69 (2009), *pp.* 17-26.